МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на третий курс

1. Задан вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ единичной длины.

а)④ Найти объём множества

$$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2\,(\vec{x},\vec{a})^2 \le |\vec{x}| \le 1 \right\}.$$

б)② Найти массу поверхности

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\vec{x}| = 1 \right\}$$

с поверхностной плотностью

$$\rho\,(\vec{x}) = \frac{1}{2 + (\vec{x},\vec{a})}.$$

2. Задан функционал

$$J(y) = \int\limits_1^2 \Big(4\,\big(y(x)\big)^2 + x^2\,\big(y'(x)\big)^2 + 4xy(x)y'(x) \Big)\,dx, \qquad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

а)④ Найти допустимые экстремали функционала J.

б)② Исследовать найденные экстремали на экстремум и строгий экстремум.

3. Заданы параболоид P и прямая L:

$$P = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2 \right\}, \quad L = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z + 2 = 2x = y \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

а)① Доказать, что параболоид P и прямая L не пересекаются.

б)③ Найти точку параболоида P, ближайшую к прямой L.

в)② Найти расстояние от параболоида P до прямой L.

4. Задана функция

$$f(z) = \frac{z}{\sin\left(\frac{1}{z}\right) - 1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

а)② Найти все изолированные особые точки функции f и определить их тип.

б)④ Для окружности

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \; : \; \left| z - \frac{i}{3} \right| = \frac{1}{2} \right\},$$

ориентированной против часовой стрелки, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C f(z)\, dz.$$

5.⑥ Для любого положительного числа R рассматриваются две полуокружности в комплексной плоскости

$$C_R^+ = \{ z \in \mathbb{C} \; : \; |z| = R, \;\; \operatorname{Im} z > 0 \}, \quad C_R^- = \{ z \in \mathbb{C} \; : \; |z| = R, \;\; \operatorname{Im} z < 0 \},$$

ориентированные против часовой стрелки. Задана функция

$$f(z) = \frac{\exp(iz)}{z^2 + iz + 2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

а)① Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)\, dz.$$

б)② Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

в)③ Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R^-} f(z)\, dz.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на четвёртый курс

1. Задан вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ единичной длины.

а) ③ Вычислить интеграл
$$\int\limits_{|\vec{x}|<1} \frac{d^3x}{|\vec{x}-\vec{a}|}.$$

б) ③ Найти поток векторного поля
$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{a}}{2+(\vec{x},\vec{a})}$$
через внешнюю поверхность сферы
$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\vec{x}| = 1 \right\}.$$

2. Задан функционал
$$J(y) = \int\limits_1^2 \big(y'(x)\big)^2 x\,dx, \qquad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2.$$

а) ④ Найти допустимые экстремали функционала J.

б) ② Исследовать найденные экстремали на экстремум и строгий экстремум.

3. В евклидовом пространстве $\mathcal{E} = CL_2[0, 2\pi]$ рассматриваются функции
$$h(x) = x \quad \text{и} \quad f_k(x) = e^{ikx}, \quad \text{где} \quad k = \overline{1, N}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Здесь N — натуральное число. В $\mathcal{E}$ рассматривается подпространство L_N — линейная оболочка функций $f_1, \ldots, f_N$.

а) ③ Найти ортогональную проекцию функции h на подпространство L_N.

б) ③ Найти расстояние $\rho(h, L_N)$ от функции h до подпространства L_N и вычислить предел
$$\lim_{N\to\infty} \rho(h, L_N).$$

4. Задана функция
$$f(z) = \frac{z^3}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)+1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

а)② Найти все изолированные особые точки функции f и определить их тип.

б)④ Для окружности

$$C = \{\ z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 1\ \},$$

ориентированной против часовой стрелки, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C f(z)\, dz.$$

5.⑥ Для любого положительного числа R рассматриваются две полуокружности в комплексной плоскости

$$C_R^+ = \{\ z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = R,\ \ \operatorname{Im} z > 0\ \}, \quad C_R^- = \{\ z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = R,\ \ \operatorname{Im} z < 0\ \},$$

ориентированные против часовой стрелки. Задана функция

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z - i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

а)② Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

б)② Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)\, dz.$$

в)② Вычислить предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R^-} f(z)\, dz.$$

ОТВЕТЫ

для поступающих на третий курс

1. Задан вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ единичной длины.

а) ④ Найти объём множества

$$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2\,(\vec{x}, \vec{a})^2 \leq |\vec{x}| \leq 1 \right\}.$$

б) ② Найти массу поверхности

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (\vec{x}, \vec{x}) = 1 \right\}$$

с поверхностной плотностью

$$\rho\,(\vec{x}) = \frac{1}{2 + (\vec{x}, \vec{a})}.$$

Ответ: а) $\frac{8\pi}{5\sqrt{2}} - \frac{\pi}{30}$; б) $2\pi \ln 3$.

Решение: а) В сферических координатах с полярным углом $\theta \in [0, \pi]$, отсчитываемым от направления $\vec{a}$ множество G задаётся неравенствами:

$$2r \cos^2 \theta \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Имеем:

$$V_G = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} r^2\,dr \int\limits_0^{\pi} 2\pi \sin\theta\,d\theta + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} r^2\,dr \int\limits_{|\cos\theta| \leq \frac{1}{\sqrt{2r}}} 2\pi \sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{8} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} r^2\,dr \int\limits_{|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2r}}} 2\pi\,dt = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} r^{\frac{3}{2}}\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{5\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{8\pi}{5\sqrt{2}} - \frac{\pi}{30}.$$

Инструкция: В тройном интеграле сделан верный переход к сферическим координатам — 2 очка.

б) Параметризуя сферу S сферическими координатах с полярным углом $\theta \in$ $\in [0, \pi]$, отсчитываемым от направления $\vec{a}$, находим:

$$\int\limits_S \rho\,(\vec{x})\ dS = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{2 + \cos\theta} = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{2 + t} = 2\pi \ln 3.$$

Инструкция: В поверхностном интеграле сделан верный переход к сферическим координатам — 1 очко.

2. Задан функционал

$$J(y)=\int\limits_1^2\Big(4\left(y(x)\right)^2+x^2\left(y'(x)\right)^2+4xy(x)y'(x)\Big)\,dx,\qquad y(1)=0,\quad y(2)=1.$$

а) 4 Найти допустимые экстремали функционала J.

б) 2 Исследовать найденные экстремали на экстремум и строгий экстремум.

Ответ: а) $y_*(x)=\frac{4}{7}\left(x-\frac{1}{x^2}\right)$; б) y_* — строгий минимум.

Решение: а) Уравнение Эйлера—Лагранжа:

$$8y+4xy'-\frac{d}{dx}\left(2x^2y'+4xy\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad x^2y''+2xy'-2=0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y(x)=Ax+\frac{B}{x^2}.$$

Из граничных условий

$$A+B=0,\quad 2A+\frac{B}{4}=1\quad\Leftrightarrow\quad A=-B=\frac{4}{7}.$$

Следовательно, единственная допустимая экстремаль

$$y_*(x)=\frac{4}{7}\left(x-\frac{1}{x^2}\right).$$

Инструкция: Выписано уравнение Эйлера—Лагранжа — 1 очко. Найдено его общее решение — 2 очка. Найдено решение, удовлетворяющее граничным условиям — 1 очко.

б) Для любой функции $h\in C^1[1,2]$ вида $h(1)=h(2)=0$ и $h\not\equiv 0$ имеем:

$$J(y_*+h)-J(y_*)=\int\limits_1^2\Big(4\left(h(x)\right)^2+x^2\left(h'(x)\right)^2+4xh(x)h'(x)\Big)\,dx=$$

$$=\int\limits_1^2\Big(4\left(h(x)\right)^2+x^2\left(h'(x)\right)^2\Big)\,dx+\underbrace{2xh^2(x)\Big|_{x=1}^{x=2}}_{=0}-\int\limits_1^2 2\left(h(x)\right)^2\,dx=$$

$$=\int\limits_1^2\Big(2\left(h(x)\right)^2+x^2\left(h'(x)\right)^2\Big)\,dx>0$$

Инструкция: В приращении функционала верно проведено интегрирование по частям — 1 очко.

3. Заданы параболоид P и прямая L:

$$P = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = x^2 + y^2\ \}, \quad L = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z + 2 = 2x = y\ \}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

а)① Доказать, что параболоид P и прямая L не пересекаются.

б)③ Найти точку параболоида P, ближайшую к прямой L.

в)② Найти расстояние от параболоида P до прямой L.

Ответ: б) $\frac{1}{5}(1, 2, 1)$; в) $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Решение: а) Если существует точка $(x, y, z) \in P \cap L$, то

$$x^2 + y^2 = z = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = (x-1)^2 + y^2 + 1 \geq 1 \quad \text{— противоречие.}$$

Инструкция: Получено явное противоречие в предположении, что выполнено $P \cap L \neq \varnothing$ — 1 очко.

б) Пусть точка $(x, y, z) \in P$ — ближайшая к L. Тогда нормаль к параболоиду P в этой точке — $(2x, 2y, -1)$ — перпендикулярна направляющему вектору прямой L — $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$:

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - 2y.$$

Точка прямой L, ближайшая к параболоиду P, имеет вид

$$(x, y, z) + t(2x, 2y, -1) \in L \quad \text{для подходящего } t > 0.$$

Получаем:

$$z - t + 2 = 2x(1 + 2t) = y(1 + 2t) \quad \Rightarrow \quad y = 2x.$$

Следовательно, $y = 2(1 - 2y) = 2 - 4y$, откуда

$$y = \frac{2}{5}, \quad x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}, \quad z = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}.$$

Инструкция: Записано условие перпендикулярности нормали к параболоиду в искомой точке и направляющего вектора прямой — 1 очко.

в) Имеем:

$$z - t + 2 = y(1 + 2t), \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{5} - t + 2 = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}t, \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{1}{5} = \left(1 + \frac{4}{5}\right)t,$$

откуда $t = 1$. Тогда искомое расстояние между P и L равно

$$\left|t(2x, 2y, -1)\right| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Инструкция: Найдена величина параметра t — 1 очко.

4. Задана функция

$$f(z) = \frac{z}{\sin\left(\frac{1}{z}\right) - 1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

а)② Найти все изолированные особые точки функции f и определить их тип.

б)④ Для окружности

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \left| z - \frac{i}{3} \right| = \frac{1}{2} \right\},$$

ориентированной против часовой стрелки, вычислить интеграл

$$\oint_C f(z)\, dz.$$

Ответ: а) $z_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюс второго порядка, $z = \infty$ — полюс первого порядка. б) $2i(96 - \pi)$.

Решение: а) Нули знаменателя:

$$\sin\frac{1}{z} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

первая производная знаменателя в этих точках равна нулю, вторая производная — нетривиальна. Поэтому для каждого $k \in \mathbb{Z}$ точка $z_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$ является нулём знаменателя второго порядка при регулярном ненулевом числителе, то есть z_k — полюс второго порядка функции f. Так как $z_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $z = 0$ является неизолированной особой точкой f. Далее, при $z \to \infty$ имеем $f(z) \sim z$, то есть $z = \infty$ — полюс первого порядка f.

Инструкция: Верно найдены нули знаменателя — $1/2$ очка. Определён тип нуля знаменателя — $1/2$ очка. Указано, что $z = 0$ — неизолированная особая точка — $1/4$ очка. Точка $z = \infty$ объявлена изолированной особой — $1/4$ очка. Определён тип $z = \infty$ — $1/2$ очка.

б) При $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ имеем

$$\left| z_k - \frac{i}{3} \right| \le \sqrt{\frac{4}{9\pi^2} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{4+\pi^2}}{3\pi} < \frac{\sqrt{20}}{9} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 80 < 81.$$

Далее,

$$\left| z_0 - \frac{i}{3} \right| = \sqrt{\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{9}} > \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6} > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 13 > 9.$$

Следовательно, по теореме Коши о вычетах, получаем:

$$\oint_C f(z)\, dz = -2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z_0} f + \operatorname*{res}_{\infty} f \right).$$

Вычислим $\operatorname*{res}_{z_0} f$. Пусть $z = z_0 + t = \frac{2}{\pi} + t$. Имеем:

$$\sin\frac{1}{z} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi^2}{4}t^2 + O(t^3)\right)\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi^2}{4}t - \frac{\pi^3}{8}t^2 + O(t^3)\right) = 1 - \frac{\pi^4}{32}t^2 + \frac{\pi^5}{32}t^3 + O(t^4).$$

Тогда

$$f(z) = \frac{\frac{2}{\pi} + t}{-\frac{\pi^4}{32}t^2 + \frac{\pi^5}{32}t^3 + O(t^4)} = \left(-\frac{64}{\pi^5 t^2} - \frac{32}{\pi^4 t}\right)\left(1 + \pi t + O(t^2)\right) =$$
$$= -\frac{64}{\pi^5 t^2} - \frac{96}{\pi t} + O(1).$$

Таким образом,

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = -\frac{96}{\pi}.$$

Вычислим $\operatorname*{res}_{\infty} f$. При $|z| > 1$ имеем:

$$f(z) = \frac{z}{-1 + \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)} = -z\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right) = -z - 1 - \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = 1.$$

Окончательно находим:

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = -2\pi i\left(-\frac{96}{\pi} + 1\right) = 2i(96 - \pi).$$

Инструкция: Интеграл записан в терминах вычетов — 1 очко. Найден вычет в точке z_0 — 2 очка. Найден вычет на бесконечности — 1 очко.

5.(6) Для любого положительного числа R рассматриваются две полуокружности в комплексной плоскости

$$C_R^+ = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = R,\;\; \operatorname{Im} z > 0 \,\}, \quad C_R^- = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = R,\;\; \operatorname{Im} z < 0 \,\},$$

ориентированные против часовой стрелки. Задана функция

$$f(z) = \frac{\exp(iz)}{z^2 + iz + 2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

а)(1) Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz.$$

б) ② Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

в) ③ Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{C_R^-} f(z)\,dz.$$

Ответ: а) 0; б) $\frac{2\pi}{3e}$; в) $\frac{2\pi}{3e}\left(1+3e^3\right)$.

Решение: а) По лемме Жордана сразу получаем, что

$$\int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Действительно, $f(z) = g(z)\exp(i\alpha z)$, где $\alpha = 1 > 0$, а функция

$$g(z) = \frac{1}{z^2+iz+2} = \frac{1}{(z-i)(z+2i)},$$

откуда при $|z| \geq R > 2$ получаем

$$|g(z)| \leq \frac{1}{(R-1)(R-2)} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Инструкция: Дан верный ответ со ссылкой на лемму Жордана — 1/2 очка. Проверены условия леммы Жордана — 1/2 очка.

б) Для любого $R > 2$ рассмотрим область

$$G_R = \left\{\, z\in\mathbb{C} \;:\; |z|<R,\;\; \operatorname{Re} z > 0 \,\right\},$$

граница которой $\partial G_R = [-R,R]\cup C_R^+$ ориентирована против часовой стрелки. Получаем:

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = \oint\limits_{\partial G_R} f(z)\,dz - \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} f(z) - \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i\frac{e^{-1}}{i+2i} - \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz \overset{R\to+\infty}{\to} \frac{2\pi}{3e}.$$

Инструкция: Интеграл представлен разностью комплексных интегралов по ∂G_R и C_R^+ — 1 очко. Найден комплексный интеграл по ∂G_R — 1 очко.

в) Для любого $R > 2$ рассмотрим область

$$B_R = \left\{\, z\in\mathbb{C} \;:\; |z|<R \,\right\},$$

граница которой $\partial B_R = C_R^- \cup C_R^+$ ориентирована против часовой стрелки. Получаем:

$$\oint\limits_{C_R^-} f(z)\,dz = \oint\limits_{\partial B_R} f(z)\,dz - \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-2i} f(z) \right) - \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{i+2i} + \frac{e^2}{2i-i} \right) - \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz \overset{R\to+\infty}{\to} 2\pi \left(\frac{1}{3e} + e^2 \right) = \frac{2\pi}{3e}\left(1+3e^3\right).$$

Инструкция: Интеграл представлен разностью комплексных интегралов по ∂B_R и C_R^+ — 2 очка. Найден комплексный интеграл по ∂B_R — 1 очко.

ОТВЕТЫ

для поступающих на четвёртый курс

1. Задан вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ единичной длины.

а)③ Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|\vec{x}|<1} \frac{d^3x}{|\vec{x}-\vec{a}|}.$$

б)③ Найти поток векторного поля

$$\vec{F}\,(\vec{x}) = \frac{\vec{a}}{2+(\vec{x},\vec{a})}$$

через внешнюю поверхность сферы

$$S = \left\{\ \vec{x} \in \mathbb{R}^3\ :\ |\vec{x}| = 1\ \right\}.$$

Ответ: а) $\frac{4\pi}{3}$, б) $4\pi \ln \frac{e}{3}$

Решение: а) В сферических координатах с полярным углом $\theta \in [0, \pi]$, отсчитываемым от направления $\vec{a}$, имеем:

$$\int\limits_{|\vec{x}|<1} \frac{d^3x}{|\vec{x}-\vec{a}|} = \int\limits_0^1 dr\, r^2\, 2\pi \int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}} =$$

$$= \int\limits_0^1 dr\, r^2\, 2\pi \int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{r^2-2rt+1}} = \int\limits_0^1 dr\, r^2\, 2\pi \left(-\frac{1}{r}\right) \sqrt{r^2-2rt+1}\Big|_{t=-1}^{t=1} =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 dr\, r\, \big(r+1-(1-r)\big) = 4\pi \int_0^1 r^2\, dr = \frac{4\pi}{3}.$$

Инструкция: В тройном интеграле сделан верный переход к сферическим координатам — 1 очко. Произведено интегрирование по полярному углу — 1 очко.

б) Для любой точки $\vec{x} \in S$ единичной внешней нормалью к S в этой точке является вектор $\vec{n}(\vec{x}) = \vec{x}$. Следовательно, поток векторного поля $\vec{F}$ через внешнюю поверхность S равен

$$I = \int\limits_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right) dS = \int\limits_{|\vec{x}|=1} \frac{(\vec{x},\vec{a})}{2+(\vec{x},\vec{a})}\, dS.$$

Параметризуя сферу S сферическими координатами с полярным углом $\theta \in$ $\in [0,\pi]$, отсчитываемым от направления $\vec{a}$, находим:

$$I = 2\pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta}{2+\cos\theta} = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} \frac{t\,dt}{2+t} =$$

$$= 2\pi \left(2 - 2\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{2+t} \right) = 4\pi\,(1-\ln 3) = 4\pi \ln\frac{e}{3}.$$

Инструкция: Поток записан в виде поверхностного интеграла — 1 очко. Поверхностный интеграл преобразован в терминах какой-либо параметризации сферы — 1 очко.

2. Задан функционал

$$J(y) = \int\limits_1^2 \big(y'(x)\big)^2\,x\,dx, \qquad y(1)=0, \quad y(2)=\ln 2.$$

а)④ Найти допустимые экстремали функционала J.

б)② Исследовать найденные экстремали на экстремум и строгий экстремум.

Ответ: а) $y_*(x) = \ln x$ б) y_* — строгий минимум.

Решение: а) Уравнение Эйлера—Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dx}\big(2y'(x)x\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x)x = C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = C\ln x + D.$$

Из граничных условий $C\ln 1 + D = 0$ и $C\ln 2 + D = \ln 2$ получаем $D = 0$ и $C = 1$. Таким образом, единственной допустимой экстремалью является $y_*(x) = \ln x$.

Инструкция: а) Выписано уравнение Эйлера—Лагранжа — 1 очко. Найдено общее решение уравнения Эйлера—Лагранжа — 2 очка.

б) Для любой функции $h \in C^1[1,2]$ вида $h(1) = h(2) = 0$ и $h \not\equiv 0$ имеем:

$$J(y_*+h) - J(y_*) = \int\limits_1^2 \big(h'(x)\big)^2\,x\,dx \geq 0.$$

Следовательно, y_* — минимум. Если предположить, что $J(y_*+h)-J(y_*) = 0$, то, в силу неотрицательности и непрерывности функции $\big(h'(x)\big)^2 x$ на отрезке интегрирования $[1,2]$, получаем, что $\big(h'(x)\big)^2 x = 0$ для любого $x \in [1,2]$. Это равносильно $h'(x) \equiv 0$ на $[1,2]$, откуда, по теореме Лагранжа, получаем, что $h(x) \equiv \mathrm{const}$ на $[1,2]$. Так как $h(1) = h(2) = 0$, то $h(x) \equiv 0$ на $[1,2]$, что противоречит условию $h(x) \not\equiv 0$. Следовательно, $J(y_* + h) - J(y_*) > 0$, то есть y_* — строгий минимум.

Инструкция: Показано, что y_* доставляет минимум — 1 очко. Показано, что y_* является строгим минимумом — 1 очко.

3. В евклидовом пространстве $\mathcal{E} = CL_2[0, 2\pi]$ рассматриваются функции

$$h(x) = x \quad \text{и} \quad f_k(x) = e^{ikx}, \quad \text{где} \quad k = \overline{1, N}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Здесь N — натуральное число. В $\mathcal{E}$ рассматривается подпространство L_N — линейная оболочка функций $f_1, \ldots, f_N$.

а)③ Найти ортогональную проекцию функции h на подпространство L_N.

б)③ Найти расстояние $\rho(h, L_N)$ от функции h до подпространства L_N и вычислить предел

$$\lim_{N\to\infty} \rho(h, L_N).$$

Ответ: а) $P_N h = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{if_k}{k}$

б) $\rho(h, L_N) = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{3} - \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{2\pi}{k^2}}, \quad \lim\limits_{N\to\infty} \rho(h, L_N) = \sqrt{\frac{7\pi^3}{3}}.$

Решение: а) Заметим, что при $k \neq m$ функции f_k и f_m перпендикулярны в $\mathcal{E}$, так как

$$(f_k, f_m) = \int_0^{2\pi} e^{ikx}\, e^{-imx}\, dx = \left.\frac{e^{i(k-m)x}}{k-m}\right|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{1-1}{k-m} = 0$$

Следовательно, ортогональной проекцией $P_N h$ функции h на подпространство L_N является сумма ортогональных проекций h на $\mathrm{Lin} f_k$ по $k \in \overline{1, N}$:

$$P_N h = \sum_{k=1}^{N} \frac{(h, f_k)}{(f_k, f_k)} f_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} x e^{-ikx}\, dx \right) f_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{2\pi}{ik} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{ik}\, dx \right) f_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{if_k}{k}.$$

Инструкция: Обосновано, что проекция h на L_N есть сумма проекций на $\mathrm{Lin} f_k$ по $k \in \overline{1, N}$ — 1 очко. Верно записана проекция h на $\mathrm{Lin} f_k$ — 1 очко.

б) Расстоянием от h до L_N равно расстоянию от h до $P_N h$:

$$\rho(h, L_N) = \sqrt{(h - P_N h, h - P_N h)} = \sqrt{(h, h) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\left|(h, f_k)\right|^2}{(f_k, f_k)}} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} x^2\,dx - \sum_{k=1}^{N} \frac{2\pi}{k^2}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{3} - \sum_{k=1}^{N} \frac{2\pi}{k^2}}$$

Как известно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ Следовательно, находим:

$$\lim_{N\to\infty} \rho(h, L_N) = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{3} - \frac{2\pi\cdot\pi^2}{6}} = \sqrt{\frac{7\pi^3}{3}}.$$

Инструкция: Найдено расстояние от h до L_N — 2 очка.

4. Задана функция

$$f(z) = \frac{z^3}{\cos\left(\frac{1}{z}\right) + 1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

а)② Найти все изолированные особые точки функции f и определить их тип.

б)④ Для окружности

$$C = \{\ z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 1\ \},$$

ориентированной против часовой стрелки, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C f(z)\,dz.$$

Ответ: а) $z_k = \frac{1}{\pi+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюсы второго порядка, $z = \infty$ — полюс третьего порядка, б) $\frac{\pi i}{24}$.

Решение: а) Так как $\cos\frac{1}{z} + 1 = 0$ равносильно $\frac{1}{z} = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то точки $z_k = \frac{1}{\pi+2\pi k}$ для $k \in \mathbb{Z}$ являются нулями знаменателя функции $f(z)$ при ненулевом числителе. Далее $\frac{d}{dz}\left(\cos\frac{1}{z} + 1\right)\Big|_{z=z_k} = -\frac{1}{z_k^2}\sin\frac{1}{z_k} = 0$, $\frac{d^2}{dz^2}\left(\cos\frac{1}{z} + 1\right)\Big|_{z=z_k} = \frac{1}{z_k^4}\cos\frac{1}{z_k} = -\frac{1}{z_k^4} \neq 0$. Следовательно, z_k — полюс второго порядка f. Так как $z_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $z = 0$ — неизолированная особая точка f. Далее, при $z \to \infty$ выполнено $f(z) \sim \frac{z^3}{2}$, поэтому $z = \infty$ — полюс третьего порядка f.

Инструкция: Верно найдены нули знаменателя — $1/2$ очка. Определён тип нуля знаменателя — $1/2$ очка. Указано, что $z = 0$ — неизолированная особая точка — $1/4$ очка. Точка $z = \infty$ объявлена изолированной особой — $1/4$ очка. Определён тип $z = \infty$ — $1/2$ очка.

б) Заметим, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ выполнено $|z_k| \le \frac{1}{\pi} < 1$. Следовательно,

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

При $|z| > 1$ имеем:

$$f(z) = \frac{z^3}{2 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} + O\left(\frac{1}{z^6}\right)} =$$

$$= \frac{z^3}{2}\left(1 + \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{16z^4} - \frac{1}{48z^4} + O\left(\frac{1}{z^6}\right)\right) =$$

$$= \frac{z^3}{2} + \frac{z}{8} + \frac{1}{48z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Следовательно, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{48}$, откуда

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = \frac{\pi i}{24}.$$

Инструкция: Интеграл записан в терминах вычетов — 1 очко. Найден вычет на бесконечности — 3 очка.

5.(6) Для любого положительного числа R рассматриваются две полуокружности в комплексной плоскости

$$C_R^+ = \{\, z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = R, \ \operatorname{Im} z > 0 \,\}, \quad C_R^- = \{\, z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = R, \ \operatorname{Im} z < 0 \,\},$$

ориентированные против часовой стрелки. Задана функция

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z - i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

а)(2) Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

б)(2) Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz.$$

в)(2) Вычислить предел

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R^-} f(z)\,dz.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{e}$ б) $-\pi e$ в) $\frac{\pi}{e}$.

Решение: а) Для любого $R > 1$ имеем:

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ix}\,dx}{2i(x-i)} - \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{-ix}\,dx}{2i(x-i)}.$$

Определим в комплексной плоскости две области

$$G_R^+ = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0 \,\}, \quad G_R^- = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < R,\ \operatorname{Im} z < 0 \,\},$$

границы которых ориентированы против часовой стрелки. Получаем:

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ix}\,dx}{2i(x-i)} = \underbrace{\oint\limits_{\partial G_R^+} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{=\frac{\pi}{e}} - \underbrace{\int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{\substack{\to 0 \text{ при } \mathbb{R}\to+\infty \\ \text{по лемме Жордана}}} \overset{\mathbb{R}\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{e},$$

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{-ix}\,dx}{2i(x-i)} = -\underbrace{\oint\limits_{\partial G_R^-} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{C_R^-} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{\substack{\to 0 \text{ при } \mathbb{R}\to+\infty \\ \text{по лемме Жордана}}} \overset{\mathbb{R}\to+\infty}{\to} 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

Инструкция: После применения формулы Эйлера для $\sin(x)$ найден предел одного из двух возникших интегралов — 1 очко.

б) Для любого $R > 1$ имеем:

$$\int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz = \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)} - \int\limits_{C_R^+} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}.$$

По лемме Жордана,

$$\int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)} \overset{R\to+0}{\to} 0.$$

Определим в комплексной плоскости область

$$B_R = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < R \,\},$$

граница которой ориентирована против часовой стрелки. Получаем:

$$\int\limits_{C_R^+} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)} = \underbrace{\oint\limits_{B_R} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{=\pi e} - \underbrace{\int\limits_{C_R^-} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{\substack{\to 0 \text{ при } \mathbb{R}\to+\infty \\ \text{по лемме Жордана}}} \overset{R\to+\infty}{\to} \pi e.$$

Следовательно,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R^+} f(z)\,dz = -\pi e.$$

Инструкция: После применения формулы Эйлера для $\sin(z)$ найден предел одного из двух возникших интегралов — 1 очко.

в) Для любого $R > 1$ имеем:

$$\int\limits_{C_R^-} f(z)\,dz = \int\limits_{C_R^-} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)} - \int\limits_{C_R^-} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)}.$$

По лемме Жордана,

$$\int\limits_{C_R^-} \frac{e^{-iz}\,dz}{2i(z-i)} \overset{R\to+0}{\to} 0.$$

Определим в комплексной плоскости область

$$B_R = \{\, z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < R \,\},$$

граница которой ориентирована против часовой стрелки. Получаем:

$$\int\limits_{C_R^-} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)} = \underbrace{\oint\limits_{B_R} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{=\frac{\pi}{e}} - \underbrace{\int\limits_{C_R^+} \frac{e^{iz}\,dz}{2i(z-i)}}_{\substack{\to 0 \text{ при } \mathbb{R}\to+\infty \\ \text{по лемме Жордана}}} \overset{R\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{e}.$$

Следовательно,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R^-} f(z)\,dz = \frac{\pi}{e}.$$

Инструкция: После применения формулы Эйлера для $\sin(z)$ найден предел одного из двух возникших интегралов — 1 очко.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЗАДАЧА ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

для поступающих на первый курс по специальности ПМИ

6. Задан нетривиальный n–мерный числовой столбец a (здесь n — натуральное число, большее единицы). Пусть E_n — единичная $n \times n$ матрица.

а)① Вычислить $\det\left(aa^{\text{т}}\right)$ и $\operatorname{rg}\left(aa^{\text{т}}\right)$.

б)① Для любого n–мерного числового столбца b найти все решения x линейной системы уравнений

$$\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) x = b.$$

в)① Доказать, что матрица $\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)$ невырождена, и вычислить обратную матрицу

$$\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)^{-1}.$$

г)② Вычислить $\det\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)$.

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–2	НЕУД. (1)
3–5	НЕУД. (2)
6–8	УДОВЛ. (3)
9–11	УДОВЛ. (4)
12–14	ХОР. (5)
15–17	ХОР. (6)
18–20	ХОР. (7)
21–23	ОТЛ. (8)
24–26	ОТЛ. (9)
27–30	ОТЛ. (10)